

Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.

Von

L. PRANDTL aus Hannover.

(Hierzu eine Figurentafel.)

In der klassischen Hydrodynamik wird vorwiegend die Bewegung der *reibungslosen* Flüssigkeit behandelt. Von der *reibenden Flüssigkeit* besitzt man die Differentialgleichung der Bewegung, deren Ansatz durch physikalische Beobachtungen wohl bestätigt ist. An Lösungen dieser Differentialgleichung hat man außer eindimensionalen Problemen, wie sie u. a. von Lord Rayleigh*) gegeben wurden, nur solche, bei denen die Trägheit der Flüssigkeit vernachlässigt ist, oder wenigstens keine Rolle spielt. Das zwei- und dreidimensionale Problem mit Berücksichtigung von Reibung *und* Trägheit harrt noch der Lösung. Der Grund hierfür liegt wohl in den unangenehmen Eigenschaften der Differentialgleichung. Diese lautet in Gibbsscher Vektorsymbolik**)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \circ \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla (V + p) = k \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1)$$

($\mathbf{v}$ Geschwindigkeit, ρ Dichte, V Kräftefunktion, p Druck, k Reibungskonstante); dazu kommt noch die Kontinuitätsgleichung: für inkompressible Flüssigkeiten, die hier allein behandelt werden sollen, wird einfach

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Der Differentialgleichung ist leicht zu entnehmen, daß bei genügend langsamen und auch langsam veränderten Bewegungen der Faktor von ρ gegenüber den andern Gliedern beliebig klein wird, so daß hier mit genügender Annäherung der Einfluß der Trägheit vernachlässigt werden darf. Umgekehrt wird bei genügend rascher Be-

*) Proceedings Lond. Math. Soc. 11 S. 57 = Papers I S. 474 f.

**) $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ skalares Produkt, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ Vektorprodukt, ∇ Hamiltonscher Differentiator $\left(\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

wegung das in v quadratische Glied $v \circ \nabla v$ (Anderung der Geschwindigkeit infolge Ortswechsels) groß genug, um die Reibungswirkung $k\nabla^2 v$ als ganz nebensächlich erscheinen zu lassen. In den in der Technik in Frage kommenden Fällen von Flüssigkeitsbewegungen trifft letzteres fast immer zu. Es liegt also hier nahe, einfach die Gleichung der reibungslosen Flüssigkeit zu benutzen. Man weiß indessen, daß die bekannten Lösungen dieser Gleichung meist sehr schlecht mit der Erfahrung übereinstimmen; ich erinnere nur an die Dirichletsche Kugel, die sich nach der Theorie widerstandslos bewegen soll.

Ich habe mir nun die Aufgabe gestellt, systematisch die Bewegungsgesetze einer Flüssigkeit zu durchforschen, *deren Reibung als sehr klein angenommen wird*. Die Reibung soll so klein sein, daß sie überall vernachlässigt werden darf, wo nicht etwa große Geschwindigkeitsunterschiede auftreten, oder eine akkumulierende Wirkung der Reibung stattfindet. Dieser Plan hat sich als sehr fruchtbar erwiesen, indem man einerseits auf mathematische Formulierungen kommt, die eine Bewältigung der Probleme ermöglichen, andererseits die Übereinstimmung mit der Beobachtung sehr befriedigend zu werden verspricht. Um eines gleich hier zu erwähnen: wenn man, z. B. bei der stationierenden Bewegung um eine Kugel herum, von der Bewegung mit Reibung zur Grenze der Reibungslosigkeit übergeht, so erhält man etwas ganz anderes als die Dirichlet-Bewegung. Die Dirichlet-Bewegung ist nur mehr ein Anfangszustand, der alsbald durch die Wirkung einer auch noch so kleinen Reibung gestört wird.

Ich gehe nun zu den Einzelfragen über. Die Kraft auf den Einheitswürfel, welche von der Reibung herrührt, ist

$$\mathbf{K} = k\nabla^2 \mathbf{v}; \quad (2)$$

bezeichnet man mit $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$ den Wirbel, so ist nach einer bekannten vektor-analytischen Umformung unter Berücksichtigung, daß $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ist: $\mathbf{K} = 2k \text{rot } \mathbf{w}$. Hieraus ergibt sich ohne weiteres, daß für $\mathbf{w} = 0$ auch $\mathbf{K} = 0$ wird, d. h. daß auch bei beliebig starker Reibung die wirbelfreie Bewegung eine mögliche Bewegung darstellt; wenn sie trotzdem sich in gewissen Fällen nicht erhält, so liegt das daran, daß sich vom Rande her wirbelnde Flüssigkeit in die wirbelfreie hineinschiebt.

Bei einer beliebigen periodischen oder zyklischen Bewegung kann sich bei längerer Dauer die Wirkung der Reibung, auch wenn sie sehr klein ist, anhäufen.

Man muß daher für den Beharrungszustand verlangen, daß die Arbeit von $\mathbf{K}$, also das Linienintegral $\int \mathbf{K} \circ d\mathbf{s}$ längs jeder Stromlinie

bei zyklischen Bewegungen für einen vollen Zyklus gleich Null wird; bei nach dem Orte periodischen Strömungen hat man

$$\int^P \mathbf{K} \circ d\mathbf{s} = (V_2 + p_2) - (V_1 + p_1).$$

Bei zweidimensionalen Bewegungen, bei denen eine Stromfunktion $\psi^*)$ existiert, läßt sich hieraus mit Hilfe der Helmholtzschen Wirbelgesetze eine allgemeine Aussage über die Verteilung des Wirbels herleiten. Bei der ebenen Bewegung erhält man**)

$$\frac{dw}{d\psi} = \frac{(V_2 + p_2) - (V_1 + p_1)}{2k \int^P \mathbf{v} \circ d\mathbf{s}};$$

bei geschlossenen Stromlinien wird dies gleich Null; also ergibt sich hier das einfache Resultat, daß innerhalb eines Gebietes von geschlossenen Stromlinien der Wirbel einen konstanten Wert annimmt.

Bei axialsymmetrischen Bewegungen mit Strömung in Meridianebenen wird für geschlossene Stromlinien der Wirbel proportional dem Radius: $w = cr$; dies ergibt eine Kraft $K = 4kc$ in Richtung der Achse.

Die bei weitem wichtigste Frage des Problems ist das Verhalten der Flüssigkeit an den Wänden der festen Körper. Den physikalischen Vorgängen in der Grenzschicht zwischen Flüssigkeit und festem Körper wird man in genügender Weise gerecht, wenn man annimmt, daß die Flüssigkeit an den Wänden haften, daß also dort die Geschwindigkeit überall gleich Null bzw. gleich der Körpergeschwindigkeit sei. Ist nun die Reibung sehr klein und der Weg der Flüssigkeit längs der Wand nicht allzu lang, so wird schon in nächster Nähe der Wand die Geschwindigkeit ihren normalen Wert haben. In der schmalen Übergangsschicht ergeben dann die schroffen Geschwindigkeitsunterschiede trotz der kleinen Reibungskonstanten merkwürdige Wirkungen.

Man behandelt dieses Problem am besten, indem man in der allgemeinen Differentialgleichung planmäßige Vernachlässigungen vornimmt. Nimmt man k als klein von der zweiten Ordnung, so wird die Dicke der Übergangsschicht klein von der ersten Ordnung, ebenso die Normalkomponente der Geschwindigkeit. Die Querunterschiede des Druckes

*) Vgl. Encyclopädie der mathem. Wissensch. IV 14, 7.

**) Nach Helmholtz ist der Wirbel eines Teilchens dauernd dessen Länge in der Richtung der Wirbelachse proportional; also ist bei der stationären ebenen Bewegung auf jeder Stromlinie ($\psi = \text{const.}$) w konstant, also $w = f(\psi)$; hiermit wird

$$\int \mathbf{K} \circ d\mathbf{s} = 2k \int \text{rot } \mathbf{w} \circ d\mathbf{s} = 2kf'(\psi) \int \text{rot } \psi \circ d\mathbf{s} = 2kf'(\psi) \int \mathbf{v} \circ d\mathbf{s}.$$

können vernachlässigt werden, ebenso eine etwaige Krümmung der Stromlinien. Die Druckverteilung wird unserer Übergangsschicht von der freien Flüssigkeit aufgeprägt.

Für das ebene Problem, das ich bisher allein behandelt habe, erhält man beim stationären Zustand (X-Richtung tangential, Y-Richtung normal, u und v die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten) die Differentialgleichung

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{dp}{dx} = k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

dazu kommt noch

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Ist, wie gewöhnlich, $\frac{dp}{dx}$ durchaus gegeben, ferner für den Anfangsquerschnitt der Verlauf von u , so läßt sich jede derartige Aufgabe numerisch bewältigen, indem man durch Quadraturen aus jedem u das zugehörige $\frac{\partial u}{\partial x}$ gewinnen kann; damit kann man mit Hilfe eines der bekannten Näherungsverfahren*) immer wieder um einen Schritt in der X-Richtung weiterkommen. Eine Schwierigkeit besteht dabei allerdings in verschiedenen am festen Rande auftretenden Singularitäten. Der einfachste Fall der hier behandelten Bewegungszustände ist der, daß das Wasser an einer ebenen dünnen Platte entlang strömt. Hier ist eine Reduktion der Variablen möglich; man kann $u = f\left(-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)$ setzen. Durch numerische Auflösung der entstehenden Differentialgleichung kommt man auf eine Formel für den Widerstand

$$R = 1,1 \dots b \sqrt{k\rho l u_0^3}$$

(b Breite, l Länge der Platte, u_0 Geschwindigkeit des ungestörten Wassers gegenüber der Platte). Den Verlauf von u gibt Fig. 1.

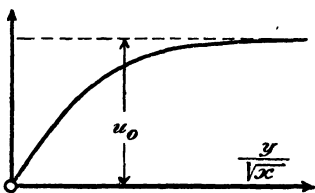


Fig. 1.

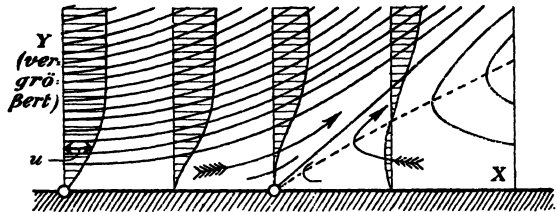


Fig. 2.

Das für die Anwendung wichtigste Ergebnis dieser Untersuchungen ist aber das, daß sich in bestimmten Fällen an einer durch die äußeren Bedingungen vollständig gegebenen Stelle der *Flüssigkeitsstrom von der Wand ablöst* (vgl. Fig. 2). Es schiebt sich also eine Flüssigkeits-

*) Vgl. z. B. Zeitschr. f. Math. u. Physik Bd. 46 S. 435 (Kutta).

schicht, die durch die Reibung an der Wand in Rotation versetzt ist, in die freie Flüssigkeit hinaus und spielt dort, eine völlige Umgestaltung der Bewegung bewirkend, dieselbe Rolle wie die Helmholtzschen Trennungsschichten. Bei einer Veränderung der Reibungskonstanten k ändert sich lediglich die Dicke der Wirbelschicht (sie ist der Größe $\sqrt{\frac{kl}{\rho u}}$ proportional), alles übrige bleibt unverändert; man kann also, wenn man will, zur Grenze $k = 0$ übergehen und behält immer noch dieselbe Strömungsfigur.

Wie eine nähere Diskussion ergibt, ist die notwendige Bedingung

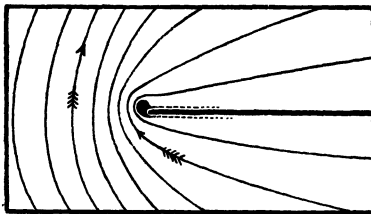


Fig. 3.

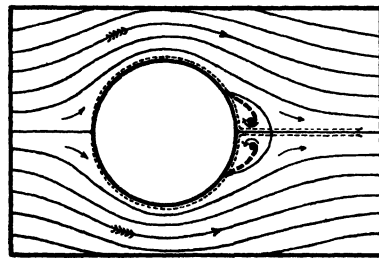


Fig. 5.

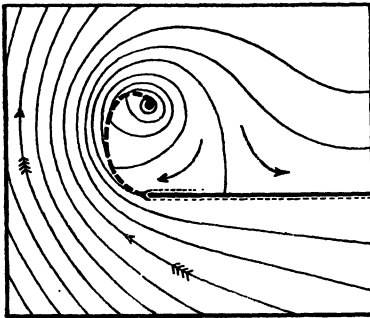


Fig. 4.

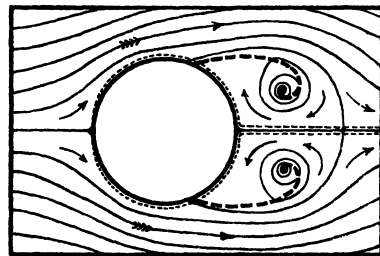


Fig. 6.

für das Ablösen des Strahles die, daß längs der Wand in der Richtung der Strömung eine Drucksteigerung vorhanden ist. Welche Größe diese Drucksteigerung in bestimmten Fällen haben muß, kann erst aus der noch vorzunehmenden numerischen Auswertung des Problems entnommen werden. Als einen plausiblen Grund für das Ablösen der Strömung kann man angeben, daß bei einer Drucksteigerung die freie Flüssigkeit ihre kinetische Energie zum Teil in potentielle umsetzt. Die Übergangsschichten haben aber einen großen Teil ihrer kinetischen Energie eingebüßt; sie besitzen nicht mehr genug, um in das Gebiet

höheren Druckes einzudringen, und werden daher diesem seitlich ausweichen.

Nach dem Vorhergehenden zerfällt also die Behandlung eines bestimmten Strömungsvorganges in zwei miteinander in Wechselwirkung stehende Teile: einerseits hat man die *freie Flüssigkeit*, die als reibungslos nach den Helmholtzschen Wirbelgesetzen behandelt werden kann, andererseits die Übergangsschichten an den festen Grenzen, deren Bewegung durch die freie Flüssigkeit geregelt wird, die aber ihrerseits durch die Aussendung von Wirbelschichten der freien Bewegung das charakteristische Gepräge geben.

Ich habe versucht, in ein paar Fällen den Vorgang durch Zeichnen der Stromlinien näher zu verfolgen; die Ergebnisse machen indes auf quantitative Richtigkeit keinen Anspruch. Soweit die Bewegung wirbelfrei ist, benutzt man mit Vorteil beim Zeichnen den Umstand, daß die

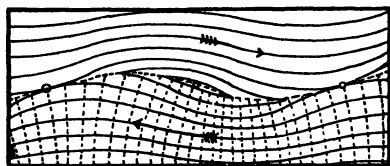


Fig. 7.

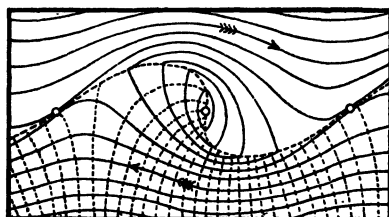


Fig. 8.

Stromlinien mit den Linien konstanten Geschwindigkeitspotentials ein quadratisches Kurvennetz bilden.

Fig. 3 und 4 zeigen den Beginn der Bewegung um eine in die Strömung hineinragende Wand in zwei Stadien. Die wirbelfreie Anfangsbewegung wird durch eine von der Kante des Hindernisses ausgehende und sich spiralig aufwickelnde Trennungsschicht (gestrichelt) rasch umgestaltet; der Wirbel rückt immer weiter ab und läßt hinter der zum Schluß stationären Trennungsschicht ruhendes Wasser zurück.

Wie sich der analoge Vorgang bei einem Kreiszyylinder abspielt, ist aus Fig. 5 und 6 zu ersehen; die von der Reibung in Rotation versetzten Flüssigkeitsschichten sind wieder durch Strichelung kenntlich gemacht. Die Trennungsflächen erstrecken sich auch hier im Beharrungszustande ins Unendliche. All diese Trennungsflächen sind bekanntlich labil; ist eine kleine sinusförmige Störung vorhanden, so entstehen Bewegungen, wie sie in Fig. 7 und 8 dargestellt sind. Man sieht, wie sich durch das Ineinandergreifen der Flüssigkeitsströme deutlich gesonderte Wirbel ausbilden. Die Wirbelschicht wird im Innern

dieser Wirbel aufgerollt, wie in Fig. 9 angedeutet ist. Die Linien dieser Figur sind keine Stromlinien, sondern solche, wie sie etwa durch Beigabe von gefärbter Flüssigkeit erhalten würden.

Ich will nun noch kurz von Versuchen berichten, die ich zum Vergleich mit der Theorie unternommen habe. Der Versuchsapparat (in Fig. 10 in Aufriß und Grundriß dargestellt) besteht aus einer $1\frac{1}{2}$ m langen Wanne mit einem Zwischenboden. Das Wasser wird durch ein Schaufelrad in Umlauf versetzt und tritt, durch einen Leit-



Fig. 9.

apparat *a* und vier Siebe *b* geordnet und beruhigt, ziemlich wirbelfrei in den Oberlauf ein; bei *c* wird das zu untersuchende Objekt eingesetzt. Im Wasser ist ein aus feinen glänzenden Blättchen bestehendes Mineral (Eisenglimmer) suspendiert; dadurch treten

alle einigermaßen deformierten Stellen des Wassers, also besonders alle Wirbel durch einen eigentümlichen Glanz hervor, der durch die Orientierung der dort befindlichen Blättchen hervorgerufen wird.

Die auf der Tafel zusammengestellten Photogramme sind auf diese Weise erhalten. Bei allen geht die Strömung von links nach rechts. Nr. 1—4 behandelt die Bewegung an einer in die Strömung hineinragenden Wand. Man erkennt die Trennungsfläche, die von der Kante ausgeht; sie ist in 1 noch sehr klein, in 2 bereits mit starken Störungen über-

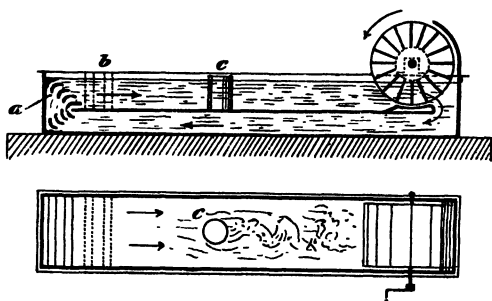


Fig. 10.

deckt, in 3 reicht der Wirbel über das ganze Bild, 4 zeigt den „Beharrungszustand“; man bemerkt auch oberhalb der Wand eine Störung; da in der Ecke infolge der Stauung des Wasserstroms ein höherer Druck herrscht, löst sich (vgl. S. 488) mit der Zeit auch hier der Flüssigkeitsstrom von der Wand ab. Die verschiedenen im „wirbelfreien“ Teil der Strömung sichtbaren Streifen (besonders in Nr. 1 und 2) rühren davon her, daß beim Beginn der Bewegung die Flüssigkeit nicht völlig ruhig war. Nr. 5 und 6 gibt die Strömung um ein kreisförmig gebogenes Hindernis, oder, wenn man will, durch einen stetig verengten und wieder erweiterten Kanal. Nr. 5 zeigt ein Stadium kurz nach Beginn der Bewegung. Die obere Trennungsfläche ist zu einer Spirale aufgewunden, die untere langgestreckt und in sehr regel-

mäßige Wirbel zerfallen. Auf der konvexen Seite nahe am rechten Ende bemerkt man den Beginn einer sich ablösenden Strömung; Nr. 6 zeigt den Beharrungszustand, bei dem sich die Strömung ungefähr in engstem Querschnitt ablöst.

Nr. 7—10 zeigt die Strömung um ein kreiszylindrisches Hindernis (einen Pfahl). Nr. 7 zeigt den Beginn der Ablösung, 8 und 9 weitere Stadien; zwischen den beiden Wirbeln ist ein Strich sichtbar, dieser besteht aus Wasser, das vor Beginn der Ablösung der Übergangsschicht angehört hatte. Nr. 10 zeigt den Beharrungszustand. Der Schweif von wirbelndem Wasser hinter dem Zylinder pendelt hin und her, daher die unsymmetrische Augenblicksgestalt. Der Zylinder enthält einen längs einer Erzeugenden verlaufenden Spalt; stellt man diesen so, wie in Nr. 11 und 12 und saugt mit einem Schlauch Wasser aus dem Zylinderinnern ab, so kann man die Übergangsschicht einer Seite abfangen. Wenn sie fehlt, muß auch ihre Wirkung, die Ablösung, ausbleiben. In Nr. 11, das zeitlich Nr. 9 entspricht, sieht man nur einen Wirbel und den Strich. In Nr. 12 (Beharrungszustand) schließt sich, obwohl, wie man sieht, nur ein verschwindender Teil des Wassers ins Innere des Zylinders tritt, die Strömung bis zum Schlitz eng an die Wand des Zylinders an; dafür hat sich aber jetzt an der ebenen Außenwand der Wanne eine Trennungsfläche gebildet (eine erste Andeutung dieser Erscheinung ist bereits in 11 zu sehen). Da in der sich erweiternden Durchflußöffnung die Geschwindigkeit abnehmen muß und daher der Druck steigt*), sind die Bedingungen für ein Ablösen der Strömung von der Wand gegeben, so daß auch diese auffallende Erscheinung in der vorgetragenen Theorie ihre Begründung erhält.

*) Es ist $\frac{1}{2} \rho v^2 + V + p = \text{const.}$ auf jeder Stromlinie.